Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 11, Sep. 2018

Published on Web 01/9/2018

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد الحادي عشر، سبتمبر 2018م

تحويل – Z

Z – Transform

أ. حواء الهادي الطويل

Abstract:

We Consider z-transform's formula, finite series, infinite series and simifinite series, also regions of convergence of z-transform .

Properties of z transform are similar to the Laplace properties signals which defined of discontinuous time of frequency band of complex variable.

z-transform open new ways to solve problems for functions which defined of time frequency band.

الملخص:

يستهل هذا البحث بعرض المفاهيم الأساسية لتحويل – Z المنتهية وشبه المنتهية وغير المنتهية ومناطق التقارب لها وينعرض صورة ملخصة عن خواصها. حيث يستخدم تحويل Z للإشارات المعرفة على الزمن المتقطع بالنطاق الترددي ذو المتغيرات المركبة وله نفس أهداف تحويل لابلاس، وهو يفتح طرق جديدة لحل المسائل والتطبيقات للدوال ذات النطاق المتقطع زمنياً.

الكلمات المفتاحية: زمن متقطع – متغير مركب – تحويل – z

1– المقدمة: Introduction

اشتق تحويل – Z من تحويل لابلاس لسلسلة من النبضات الأحادية وله نفس أهداف تحويل لابلاس للدوال المتصلة زمنياً وبصورة مشابهة لتحويل لابلاس وهو يفتح آفاق جديدة لحل المسائل والتطبيقات للدوال ذات النطاق المتقطع زمنياً.

هذا العمل يقدم دراسة مبسطة وواضحة لتحويل – Z بداية من تعريفه ثم طريقة اشتقاقه ويتبعها دراسة تحويل – Z للحالات المختلفة وكذلك مناطق التقارب لهذا التحويل ونهاية بعرض مبسط لخواصه.

1–1 تعريف تحويل – Z : Definitions of Z Transform

يعرّف تحويل – Z لإشارة متقطعة $x(k)$ بواسطة

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, Z^{-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث Z متغير مركب.

والتعريف أعلاه للإشارات غير السببية ($X(k)$ معرفة للمتغير $-\infty < k < \infty$)

وفي أغلب الحالات الإشارات سوف تكون سببية ($x(k)$ معرفة للمتغير $k \geq 0$)

وهذا يؤدي إلى تحويل $Z-$ من جانب واحد.

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\ \ Z^{-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2- اشتقاق تحويل $Z-$: derivation of Z – Transform

تحويل $Z-$ اشتق من تحويل لابلاس لسلسلة من النبضات الأحادية، تحويل لابلاس للنبضة الأحادية هو 1 وللنبضات المزاحة معرف بدلالة الدالة الأسية لسلسلة من النبضات المعرفة عند $t=\eta$ التي يكون ارتفاعها $X(\eta)$ تمتاز بعرض قصير "ضيق" $\Delta\eta$ مساحتها $X(\eta)\ \Delta\eta$ وهذا الحد لا يؤثر عند ضربه بالنبضات المزاحة لأن مقداره مساوياً للواحد.

$$X(\eta)\ \Delta\eta\ \ \delta(t-\eta)$$

وسلسلة النبضات يمكن أن تكتب:

$$^{(1)}\ X^*(t) = X(0).\Delta\eta.\delta(t) + X(T).\Delta\eta.\delta(t-T) + \cdots + X(iT).\Delta\eta.\delta(t-iT) + \cdots$$

علما بأن T هو الزمن المزاح عند النبضة التي عرضها $\Delta\eta$ وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة $X^*(t)$ نحصل على

$$^{(2)}\ X^*(s) = X(0)\Delta\eta + X(T)\Delta\eta e^{-sT} + \cdots + X(i\,T)\,\Delta\eta\ e^{-siT} = \Delta\eta \sum_{i=0}^{\infty} X(iT)\, e^{-siT}$$

حيث أن $\Delta\eta$ هو معامل ضربي فسوف نفرض قيمته في X لإعطاء

$$X^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\ e^{-s\,i\,T}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 11, Sep. 2018

Published on Web 01/9/2018

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد الحادي عشر، سبتمبر 2018م

وبإبدال $z = e^{sT}$ نحصل على $X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \; Z^{-i}$

وفيما يلي أمثلة لبعض الدوال المتقطعة البسيطة وتحويل $Z-$ لها.

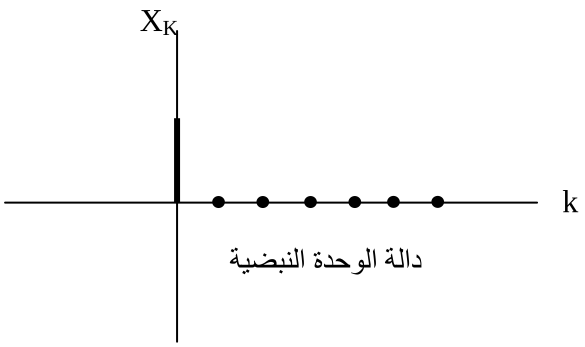
1) دالة الوحدة النبضية: Unit Impulse Function

وتعرف هذه الدالة بالصورة:

$$x_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1\,,\,2,\dots \end{cases}$$

$$\because\ X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, Z^{-k} \quad \Rightarrow X(Z) = 1.Z^{-0} + 0.Z^{-1} + \cdots$$

$$\because Z^{-0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad X(z) = 1$$

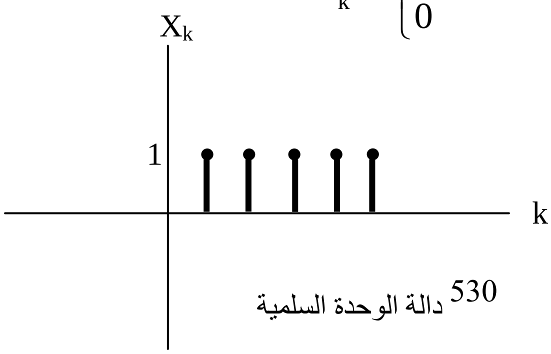


دالة الوحدة النبضية

2) دالة الوحدة السلمية: Unit step function

وتعرف هذه الدالة بالصورة:

$$x_k = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



دالة الوحدة السلمية

$$\therefore X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k} \quad \text{or} \quad X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \left(Z^{-1}\right)^{k}$$

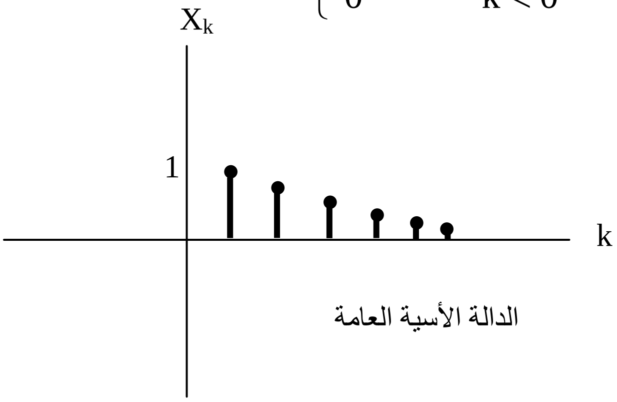
$$\because \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^{k}=\frac{1}{1-a} \qquad , \qquad |a|<1$$

$$\Rightarrow \quad X(z)=\frac{1}{1-Z^{-1}} \qquad , \qquad \frac{1}{|Z|}<1 \Rightarrow |Z|>1$$

3) الدالة الأسية العامة: Central Expose title Function

وتعرف هذه الدالة بالصورة:

$$x(k)=\begin{cases} a^{k} & k \geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$$



الدالة الأسية العامة

$x(k)=a^{k}u(k)$ حيث أن $u(k)$ دالة الوحدة السلمية

$$x(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a^{k} z^{-k} \quad \text{or} \quad x(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a z^{-1}\right)^{k}$$

$$\therefore X(z)=\frac{1}{1-a z^{-1}} \qquad ، \qquad \left|\frac{a}{z}\right|<1 \quad \Rightarrow |a|<|z|$$

3- تحويل – Z للحالات المختلفة: Different Cases of Z Transform

في هذا البند سيتم دراسة تحويل Z في حالة المتتاليات المنتهية وشبه المنتهية وغير المنتهية كلاً على حد كما يلي.

3-1 المتتاليات المنتهية:

إذا كانت المتتالية على الصورة

$$\{ X_k \}_{k=a}^{b} = \{x_a , \ x_{a+1} , \ \cdots \ , x_{b-1} , \ x_b \}$$

فإن تحويل – Z لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \ z^{-k} \qquad \Rightarrow \qquad X(z) = \sum_{k=a}^{b} x_k \ z^{-k}$$

مثال(1)

جد تحويل – Z للمتتالية المنتهية

$$\{ x_k \}_{-2}^{2} = \{ 1 , 2 , \underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{3} , 2 , 1 \}$$

الحل

$$\therefore X(z) = \sum_{k=-2}^{k=2} a_k \ z^{-k}$$

$$\therefore X(z) = z^2 + 2 \ z + 3 + 2 \ z^{-1} + z^{-2}$$

3-2 للمتتاليات شبه المنتهية:

في حالة المتتاليات على الصورة

$\{x_k\}_{k=a}^{\infty} = \{x_a \ , \ x_{a+1} \ , \ \cdots\}$ فإن تحويل – Z لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \ z^{-k} \longrightarrow X(z) = \sum_{k=a}^{\infty} x_k \ z^{-k}$$

مثال(2)

جد تحويل $-Z$ إذا كان $x_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 2^k & k \geq 0 \end{cases}$

الحل

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}$$

وهي متسلسلة هندسية.

في حالة المتتاليات التي على الصورة

$\{x_k\}_{k=-\infty}^{b} = \{\cdots, x_{b-2}, x_{b-1}, x_b\}$ فإن تحويل $-Z$ لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=-\infty}^{b} x_k \, z^{-k} = \sum_{k=-b}^{\infty} (x_k)^{-1} \, z^k$$

مثال(3)

جد تحويل $-Z$ للدالة المتقطعة $x_k = \begin{cases} e^k & k \leq 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$

الحل

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} e^k \, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \, z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{e}\right)^k = 1 + \frac{z}{e} + \left(\frac{z}{e}\right)^2 + \left(\frac{z}{e}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{e}\right)} = \frac{e}{e-z}$$

متسلسلة هندسية.

3-3 المتتاليات غير المنتهية:

إذا كانت المتتالية على الصورة:

$\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ فإن تحويل z لها يعرف بواسطة:

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \ z^{-k} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=-\infty}^{a} x_k \ z^{-k}+\sum_{k=a+1}^{\infty} x_k \ z^{-k}$$

حيث أن $a \in \Re$

مثال: (4) إذا كان $x_k=\begin{cases} 2^k & k\geq 0 \\ (\frac{1}{3})^k & k<0 \end{cases}$ جد $X(Z)$

الحل

$$x(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \ z^{-k}=\sum_{k=\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \ z^{-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}(32)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k$$

$$x(z)=\left[3z+(3z)^2+(3z)^3+\ldots\right]+\left[1+\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{2}\right)^2+\ldots\right]=\frac{3z}{1-3z}+\frac{z}{z-2}$$

4- تقارب تحويل Z –: Convergence of Z-transform

سندرس مناطق التقارب للحالات الثلاثة السابقة (المتتاليات المنتهية – المتتاليات شبه المنتهية – المتتاليات غير المنتهية).

4-1 منطقة التقارب في حالة المتتاليات المنتهية:

إذا كانت المجموعة المعطاة لـ Z لإيجاد $X(Z)$ تمتلك قيم منتهية $\{x_k\}_{k=a}^{b}$ كما في الحالة الأولى فإننا نتفادى عند إيجاد منطقة التقارب قيم $\forall \ k>=1 \ \Rightarrow \ Z^{-k}$ (التي تجعل $\frac{1}{z^k}$ غير معرفة) أي منطقة التقارب تكون لكل قيم z ماعدا $z=0$ عندما $b>0$ كما مبين بالشكل (a) وما عدا $z=\infty$ عندما $a<0$ كما مبين بالشكل (b).

مثال(5) إذا كان

$$\{x_k\}=\{8\,,3\,,-2\,,0\,,4\,,-6\}$$
$$\uparrow$$
$$k=0$$

الحل $X(z)=8z^2+3z-2+4z^{-2}-6z^3$

فإن منطقة التقارب تكون لكل قيم Z ما عدا $(z=0\ ,\ z=\infty)$ كما مبين بالشكل d.

4–2 منطقة التقارب في حالة المتتاليات شبه المنتهية:

إذا كانت المتتاليات على الصورة $\{x_k\}_{k=a}^{\infty}$ وأن تحويل z لها $\sum_{k=a}^{\infty} x_k\ z^{-k}$

فإن منطقة التقارب لـ $X(z)$ تكون لكل قيم z التي تحقق $R\_<|z|$

ما عدا القيم التي تجعل z غير معرفة أي عند $a<0$ كما مبين بالشكل c

مثال(6)

إذا كان
$$x_k=\begin{cases}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^k & k\geq \\ 0 & k<0\end{cases}$$

فإن

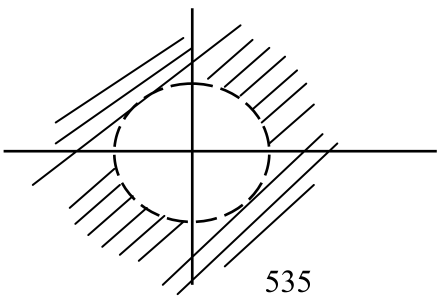
$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2z}\right)^k$$

$$X(z)=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2z}}=\frac{z}{z+\dfrac{1}{2}}$$

وهذه المتسلسلة هندسية تكون صحيحة إذا كانت $\left|-\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$

$$\left|\frac{1}{2}\right|<z \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}<z \quad\Rightarrow\quad R\_=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $X(Z)$ تتقارب لكل $|z|>\frac{1}{2}$ كما مبين في الشكل الآتي.



إذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{k=-\infty}^{b}$ وأن تحويل z لها $x(z)=\sum_{k=-\infty}^{b} x_k\, z^{-k}$

فإن $X(z)$ تتقارب لكل قيم z التي تحقق $|z|< R_+$ ما عدا القيم التي تجعل $\frac{1}{z^k}=\infty$ (أي أن $b>0$) كما مبين بالشكل e

مثال(7) إذا كان

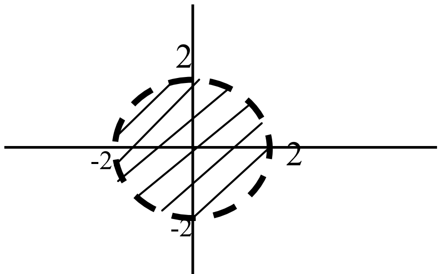
$$x_k=\begin{cases}2^k & k<0\\ 0 & k\ge 0\end{cases}$$

فإن $X(z)=\cdots+\frac{1}{8}z^3+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{2}z=\dfrac{\frac{z}{2}}{1+\frac{z}{2}}$

وهذه متسلسلة هندسية تكون صحيحة إذا كانت $\left|\frac{1}{4}z^2\right|<1$

$$|z|^2<4 \;\Rightarrow\; |z|<2 \;\Rightarrow\; R_+=2$$

$\therefore$ $X(Z)$ تتقارب لكل $|z|<2$ كما مبين بالشكل الآتي:



4–3 منطقة التقارب في حالة المتتاليات غير المنتهية:

إذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$

مع التحويلة $x(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^{-k}$

فإن $X(Z)$ تتقارب لكل قيم z التي تحقق $R_-<|z|<R_+$ كما مبين بالشكل f .

مثال(8) إذا كانت

$$x_k = \begin{cases} 2^k & k<0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 0 \end{cases}$$

$$R_- = \frac{1}{2} \qquad \text{And} \qquad R_+ = 2$$

منطقة التقارب تكون $\frac{1}{2} < |z| < 2$

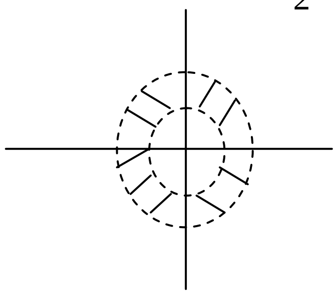
$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k \; z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \; z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \; z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,z}\right)^k = \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}$$

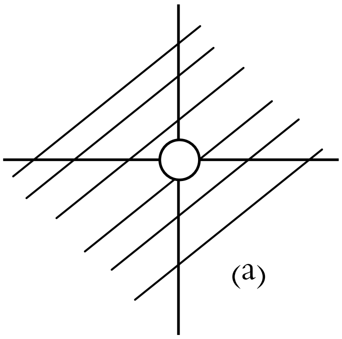
$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \longrightarrow |z| < 2$$

$$\left|\frac{1}{2\,z}\right| < 1 \longrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

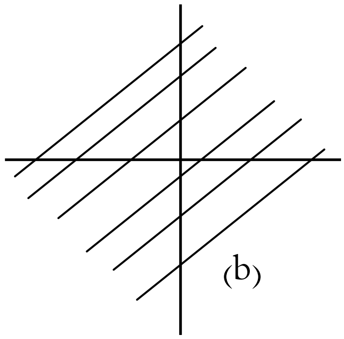
$\therefore$ $x(z)$ تتقارب لكل $\frac{1}{2} < |z| < 2$ كما مبين بالشكل التالي



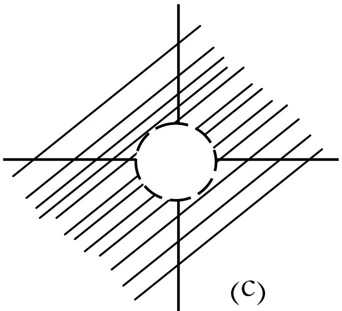
الأشكال الآتية توضح مناطق التقارب للحالات السابقة



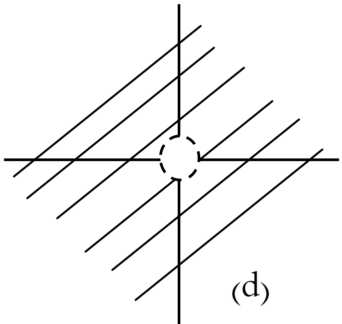
لكل قيم z ما عدا $z = 0$



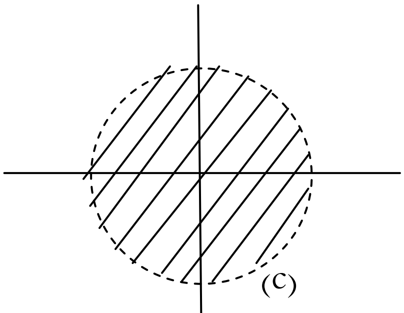
لكل قيم z ما عدا $z = \infty$



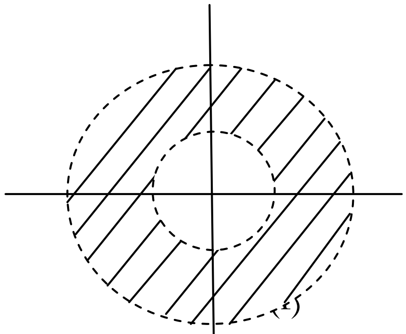
لكل قيم $R_- < | z |$



لكل قيم z ما عدا $z = \infty$ و $z = 0$



لكل قيم $R_+ > | z |$



لكي قيم $R_- < | z | < R_+$

5- خواص تحويل Z : Properties of Z – Transform

يمكن توضيح خواص تحويل Z كالاتي:

5-1 الخطية: Linearity

$$Z\left[a\{x_k\}+b\{y_k\}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a\ x_k+b\ y_k\right)z^{-k}$$

$$=a\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k\ z^{-k}+b\sum_{k=-\infty}^{\infty}y_k\ z^{-k}$$

$$=a\ X(z)+b\ Y(z)$$

$$Z\left[a\{x_k\}+b\{y_k\}\right]=a\ X(z)+b\ Y(z)$$

مثال(10) إذا كان $k\ge 0$

$$x_k=\cos k\omega_0$$

$$=\frac{1}{2}\ e^{ik\omega_0}+\frac{1}{2}\ e^{-ik\omega_0}$$

نستخدم التحويل

$$a^k\ ,\ k\ge 0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{1-a\ Z^{-1}}\qquad a<|\ z\ |$$

نجد أن

$$\left(e^{i\omega_0}\right)^k\ ,\ k\ge 0\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{1-e^{i\omega_0}\ \ z^{-1}}\qquad 1<|\ z\ |$$

$$\left(e^{-i\omega_0}\right)^k\ ,\ k\ge 0\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{1-e^{-i\omega_0}\ \ z^{-1}}\qquad 1<|\ z\ |$$

وكذلك

$$X(z)=\frac{\frac{1}{2}}{1-e^{i\omega_0}\ z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-e^{-i\omega_0}\ z^{-1}}\qquad |z|>1$$

$$=\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\ \omega_0\ z^{-1}+z^{-2}}$$

كذلك بالنسبة إلى $x_k=\sin k\,\omega_0$

$$\sin\ k\omega_0 = \frac{1}{2}\, e^{i\omega_0} - \frac{1}{2}\, e^{-ik\omega_0} \qquad\qquad k \ge 0$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{i\omega_0}\ z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-i\omega_0}\ z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-i\omega_0}\ z^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\omega_0}\ z^{-1}\right)}{\left(1 - e^{i\omega_0}\ z^{-1}\right)\left(1 - e^{-i\omega_0}\ z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-i\omega_0}\, z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{i\omega_0}\, z^{-1}\right)}{1 - e^{-i\omega_0}\ z^{-1} - e^{i\omega_0}\ z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0}\ z^{-1} - e^{-i\omega_0}\ z^{-1}\right)}{1 - z^{-1}\left(e^{i\omega_0} + e^{-i\omega_0}\right) + z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{\sin\ \omega_0\ z^{-1}}{1 - 2\ \text{cis}\ \omega_0\ z^{-1} + z^{-2}}$$

2–5 الإزاحة Shifting

لتكن $X(z) \longrightarrow \{x_k\}$ فلإيجاد تحويل $Z-$ للمتتالية $\{x_{k \pm k_0}\}$ فإن

$$z\left[\left\{x_{k\pm k_0}\right\}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k\pm k_0}\ \ z^{-k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m\ z^{-m\pm k_0} = z^{\pm k_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m\ z^{-m} = z^{\pm k_0}\ x(z)$$

$$\therefore\ z\left[\left\{x_{k\pm k_0}\right\}\right] = z^{\pm k_0}\ x(z)$$

3–5 الضرب بـ k : Multiplication by k

لتكن $X(z) \longrightarrow \{x_k\}$ فإنه يمكن إيجاد تحويل $Z-$ للمتتالية $\{kx_k\}$ كالآتي

$$Z\ \{k\ x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\ x_k\ z^{-k}$$

$$= Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, x_k\ z^{-k-1}$$

$$= Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ \left(k\ z^{-k-1}\right)$$

$$= Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left[-\frac{d}{dz} z^{-k} \right]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \; z^{-k} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$\therefore \; Z\{k \; x_k\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

أمثلة توضيحية:

مثال(**11**)

$$ka^k \; , \; k > 0 \quad \Rightarrow -z \frac{d}{dz} \left(1 - a\, z^{-1}\right)^{-1}$$

$$= (-z)(-1)\left(1 - a z^{-1}\right)^{-2} (-a)(-1)\, z^{-2} = \frac{a\, z\, z^{-2}}{\left(1 - a\, z^{-1}\right)^{-2}} = \frac{a\, z^{-1}}{\left(1 - a\, z^{-1}\right)^{-2}}$$

مثال(**12**)

$$\frac{1}{2} k(k+1)\, a^{k-1} \quad , \quad k \geq 0 \longrightarrow \frac{1}{2a} k(k+1)\, a^k$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{2a\; z^{-1}}{\left(1 - a\; z^{-1}\right)^3} \right] = \frac{z^{-1}}{\left(1 - a\; z^{-1}\right)^3}$$

4–5 خاصية القسمة على k + a : Division by k + a

يمكن إيجاد تحويل $Z -$ للمتتالية $\left\{ \frac{x_k}{k+a} \right\}$

كالآتي

$$z \left\{ \frac{x_k}{k+a} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{k+a} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \; z^a \left(-\int_0^z \hat{z}^{-k-a-1} \, d\hat{z} \right)$$

$$= -z^{a} \int_{0}^{z} \hat{z}^{-a-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \hat{z}^{-k} \, d\hat{z}$$

$$\therefore z\left\{\frac{x_k}{k+a}\right\} = -z^{a} \int_{0}^{z} \hat{z}^{-a-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\hat{z})\, \hat{z}^{-k}\, d\hat{z}$$

مثال(13)

إذا كان $\upsilon_k = 1 \quad , \quad k > 1$

وكان $\{x_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\} \quad , \quad k \geq 1 \quad = \left\{1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \cdots\right\}$

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \,.\, z^{-1} = \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)} \quad , \quad 1 < | z |$$

فإن تحويل $z -$ لـ $\{x_k\}$ يكون

$$X(z) = -z^{0} \int_{0}^{z} \hat{z}^{-1} \, v(\hat{z})\, d\hat{z}$$

$$X(z) = -\int_{0}^{z} \frac{\hat{z}^{-2}}{1 - \hat{z}^{-1}} \, d\hat{z} \;\Rightarrow\; X(z) = \ln\left(1 - z^{-1}\right) \; , \; 1 < | z |$$

5-5 تغيير المقياس: Scale Change

إذا كان $\{x_k\} \Leftrightarrow X(z)$

وكانت منطقة التقارب $R_- < | z | < R_+$

فإن تحويل Z لـ $a^k x_k$ يكون

$$Z\left\{a^k x_k\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \, x_k \, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left(\frac{z}{a}\right)^{k}$$

$$\therefore Z\left\{a^k \, x_k\right\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

وتكون منطقة التقارب $R_- < \left|\frac{z}{a}\right| < R_+ \quad \Rightarrow | a | R_- < | z | < | a | R_+$

مثال(19)

إذا كان $\cos(k\omega_0) \quad , \quad k \geq 0$

تمتلك تحويل $-Z$ كالتالي

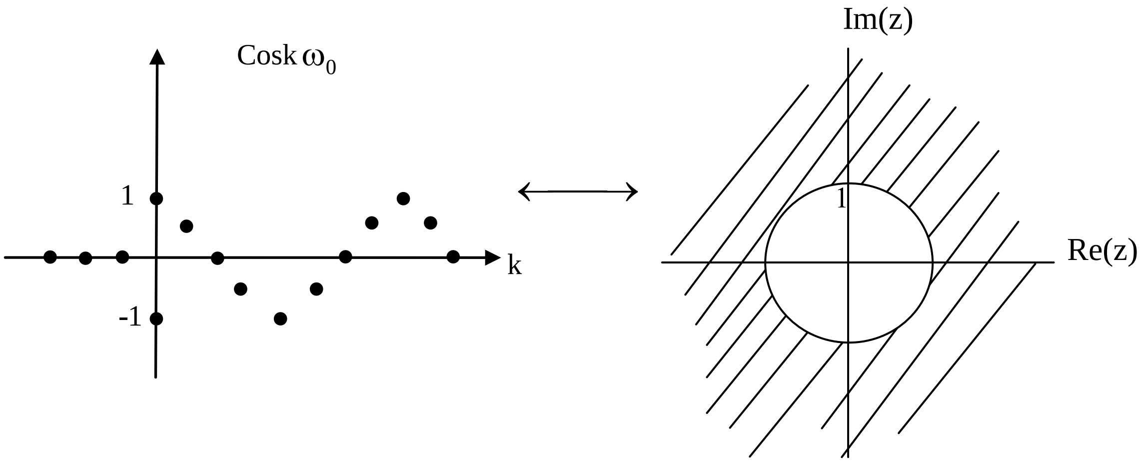
$$\cos(k\omega_0)\ ,\ k\geq 0 \longleftrightarrow \frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-1}}\ ,\ |z|>1$$

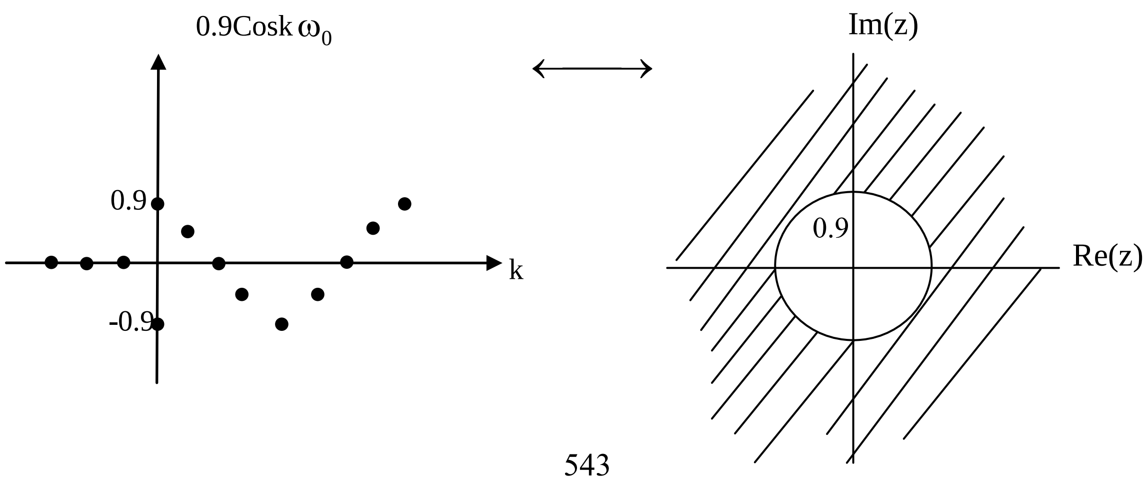
فإن تحويل Z لـ $k\geq 0$ $\quad 0.9^k\cos(k\omega_0)$

يكون

$$0.9^k\cos(k\omega_0)\ ,\ k\geq 0 \longleftrightarrow \frac{1-0.9\,z^{-1}\cos\omega_0}{1-1.8z^{-1}\cos\omega_0+0.81\,z^{-2}}\ ,\ 0.9<|z|$$

وسنوضح هذا المثال بالأشكال الآتية:





6-5 القيمة الابتدائية: Initial Value

إذا كان تحويل $-Z$ للمتتالية $\{x_k\}$ هي $X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k}$

وكان $k<k_0$ فإن

$$X(z)=\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k\ z^{-k}=x_{k_0}\ z^{-k_0}+x_{k_0+1}\ z^{-(k_0+1)}+\cdots$$

$$z^{k_0}\ X(z)=x_{k_0}+x_{k_0+1}\ z^{-1}+x_{k_0+2}\ z^{-2}+\cdots$$

عندما $z=\infty$ تصبح

$$z^{k_0}\ X(z)\Big|_{z=\infty}=x_{k_0}$$

مثال(15)

إذا كان $X(z)=\dfrac{2\,a\,z^{-1}}{\left(1-a\ z^{-1}\right)^3}$ وكان $|a|<|z|$ فإن

$$x_0=\left.\frac{2a\ z^{-1}}{\left(1-a\ z^{-1}\right)^3}\right|_{z=\infty}=0$$

$$x_1=zx(z)\big|_{z=\infty}=\left.\frac{2a}{\left(1-a\ z^{-1}\right)^3}\right|_{z=\infty}=2\ a$$

7-5 القيمة النهائية: Final Value

إذا كان تحويل $-Z$ لـ $\{\ x_k\}$ هي $X(z)$ فإن التحويل لـ $\{\ x_k-x_{k-1}\}$ هو

$$Z\left[\{x_k-x_{k-1}\}\right]=X(z)-z^{-1}X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x_k-x_{k-1})\ z^{-1}$$

$$\left(1-z^{-1}\right)X(z)=\lim_{v\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{v}(x_k-x_{k-1})\ z^{-1}$$

وبأخذ Limit للطرفين عندما $z\longrightarrow 1$ نحصل على

$$\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z)=\lim_{z\to 1}\lim_{\nu\to-\infty}\sum_{k=-\infty}^{\nu}\left(x_k-x_{k-1}\right)z^{-k}$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{k=-\infty}^{\nu}\left(x_k-x_{k-1}\right)z^{-k}$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\nu}\left(x_k-x_{k-1}\right)$$

$$=\lim_{\nu\to\infty} x_\nu$$

$$=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z)=\lim_{\nu\to\infty} x_\nu$$

مثال(16)

إذا كان $X(z)=(1-a)\,z^{-1}/\left[\left(1-z^{-1}\right)\left(1-a\,z^{-1}\right)\right]$ فإن

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\left(1-z^{-1}\right)(1-a)\,z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-a\,z^{-1}\right)}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(1-a)\,z^{-1}}{(1-a)\,z^{-1}}$$

$$=1$$

الخلاصة

1- ولتحويل $Z-$ مجالات واسعة واستخدامات كثيرة وهو يفتح طرق جديدة لحل المسائل والتطبيقات للدوال ذات النطاق المتقطع زمنياً كاستخدامه في المرشحات التي تطبق في علم الاتصالات لتحويل الإشارات من قصيرة إلى كبيرة أو العكس.

2- ويمكن الاستفادة من خواص تحويل $Z-$ في إيجاد القيمة الابتدائية والقيمة النهائية لدالة التحويل.

3- يستخدم تحويل z في تعيين $X(z)$ من المتتالية $\{x_k\}$ وكذلك في مسألة معكوس تحويل $Z-$.

هوامش:

(1) An Introduction to The Laplace transform and z-transform\ senior lecture in ma thematies, nothing ham polytechnic.

(2) An Introduction to the Laplace transform and z-transform\ senior lecture in Mathematics Nottingham polytechnic.

المراجع

أ- المراجع العربية:

1) د. أحمد عبد العالي هب الريح، نظرية المتغيرات المركبة وتطبيقاتها، 2012.

2) دويل ف. تشرشل، جيمس و. براون، روجرف . فيرمي، أساتذة الرياضيات بجامعة ميتشجان، المتغيرات المركبة وتطبيقاتها، ترجمة د. بديع توفيق محمد حسن، إسماعيل عبد الرحمن أمين، منشورات 2000.

ب- المراجع الأجنبية:

3) A.C.Corove \ An Introduction to The Laplace transform and Z – transform \ Senior Lecture in Mathematics , Nottimgham Polytechnic.

4) Bengamin C.KUO \ Automatic Control Systems \ 1975.

5) Jerrold E.Marsden , W.H.Freeman and company , 1973 , Basic complex Analysis.

6) V.Karunakaran . Alpha Science Int.Narosa Publishing Hous 2002 , Complex Analysis.